2023年度一般選抜A日程 数学

1 以下の問題の解答を, 解答用紙の該当する枠内に書き込むこと。

なお, この問題は, 解答用紙に**途中の計算式を記入する必要はない**。

(1) 不等式 $|-2x+1|<5$ を解け。

(2) $A=\{x\,|\,x^2-4x-6=0,\ x$ は実数$\}$ の部分集合は何個あるか。

(3) $\sin\theta=\dfrac{1}{4}$ のとき, $\tan\theta$ の値を求めよ。ただし, θ は第 2 象限の角である。

(4) 以下のデータは, さいころを投げて出た目の数を表している。

$2,\ x,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5,\ y,\ 2,\ 1,\ 6$

このデータの平均値が 3.0 で, 最頻値が 3 であるとき, x と y の値を求めよ。ただし, $x \leqq y$ とする。

(5) 方程式 $3x^2-x+2=0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とする。このとき, $-\alpha^2$, $-\beta^2$ を解とする x の 2 次方程式で, x^2 の係数が 9 となるものを求めよ。

(6) 円 $C:\ x^2+y^2=3$ と直線 $\ell:\ y=-x+k$ が共有点を持つとき, 定数 k の値の範囲を求めよ。

(7) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき, 不等式 $\cos 2\theta+\cos\theta \leqq 0$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(8) $a \fallingdotseq 1,\ a>0$ のとき, $\log_3 a-\log_a 9=1$ を満たす a の値を求めよ。

(9) $\displaystyle\int_0^1 (x^2-kx)dx=k$ を満たす定数 k の値を求めよ。

(10) 正の整数 n と 2^5 との最大公約数が 2^3, n と $2^3\times 3^2$ との最小公倍数が 6^3 のとき, n の値を求めよ。

(11) $\dfrac{1}{x},\ 2x+3,\ x^3$ が, この順で等比数列となるとき, x の値を求めよ。ただし, $x \fallingdotseq 0$ とする。

2 以下の問題の解答を, 解答用紙に記述せよ。

なお, この問題は, 解答用紙に**途中の計算式も記入すること**。

(1) 放物線 $y = x^2 - 2ax + 2a^2 - 2a - 8$ の頂点が第 4 象限にあるような, 定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) 10 段の階段を 1 段上がり, または 2 段上がりを組み合わせて上がるとする。次の上がり方は何通りあるか。

[イ] 1 段上がり 4 回と 2 段上がり 3 回を組み合わせた上がり方

[ロ] すべての上がり方 (ただし, 1 段上がりのみの上がり方と 2 段上がりのみの上がり方も含む)

3 以下の問題の解答を, 解答用紙に記述せよ。

なお, この問題は, 解答用紙に**途中の計算式も記入すること**。

(1) 4 点 $A(1,2,-1)$, $B(0,1,3)$, $C(2,0,1)$, $D(3,a,-3)$ がある。このとき, 次の問いに答えよ。

[イ] 四角形 ABCD が平行四辺形となるような a の値を求めよ。

[ロ] 角 $\theta = \angle BAC$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ に対して, 次の問いに答えよ。

[イ] $f(x)$ の増減表を書き, 極値を求めよ。

[ロ] 方程式 $-x^3 + 3x - 1 + k = 0$ が 1 つの負の解と 2 つの異なる正の解を持つような, 定数 k の値の範囲を求めよ。

2023年度一般選抜B日程 数学

1 以下の問題の解答を, 解答用紙の該当する枠内に書き込むこと。なお, この問題は, 解答用紙に**途中の計算式を記入する必要はない**。

(1) 循環小数 $a = 2.0\dot{2}\dot{3}$ を分数で表せ。

(2) m を正の整数とするとき, 「必要条件であるが十分条件ではない」, 「十分条件であるが必要条件ではない」, 「必要十分条件である」, 「必要条件でも十分条件でもない」のうち, 次の命題の $\boxed{}$ の中に適するものを答えよ。

「m が 13 の約数であることは, m が 26 と 78 の公約数であるための $\boxed{}$」

(3) 三角形 ABC において $\mathrm{BC} = \sqrt{6}$, $\mathrm{CA} = 2$, $\cos A = \dfrac{1}{4}$ であるとき, AB の長さを求めよ。

(4) 以下の 10 個の値からなるデータに 9 以下の整数の値 a をひとつ追加したところ, 中央値が 0.5 だけ増加し, 最頻値は不変であった。このとき, a の値を求めよ。

0, 2, 8, 4, 6, 6, 2, 9, 9, 5

(5) 2 次方程式 $5x^2 - 8x + 5 = 0$ の解を複素数の範囲で求めよ。

(6) 点 $\mathrm{A}(2,1)$, $\mathrm{B}(b,-1)$, $\mathrm{C}(5,3)$ に対して, 直線 AC と点 B の距離が $2\sqrt{13}$ となる定数 b の値を求めよ。ただし, $b < 0$ とする。

(7) 関数 $y = 2\sin\theta - 3\cos\theta$ の最小値を求めよ (それを与える θ の値は求めなくてよい)。

(8) 関数 $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-2x}$ の最大値, およびそのときの x の値を求めよ。

(9) a を定数とするとき, 定積分 $I = \displaystyle\int_0^a (x^2 - a^2)dx$ を求めよ。

(10) $2 \leqq n \leqq 10$ に対し, n 進法で表された 3 桁の正の整数 1a0 を 10 進法で表すと 77 であるとき, a の値を求めよ。

(11) 等差数列 $\{a_n\}$ に対し $b_n = a_{2n}$ $(n \geqq 1)$ とすると $b_n = 3n + 6$ となるとき, $\{a_n\}$ の初項 a と公差 d を求めよ。

2 以下の問題の解答を, 解答用紙に記述せよ。

なお, この問題は, 解答用紙に**途中の計算式も記入すること**。

(1) 2 次不等式 $4x^2 - 2(a+1)x + a < 0$ (a は定数) について, 次の問いに答えよ。

[イ] $a = 1$ のとき, この不等式を解け。

[ロ] $a > 1$ のとき, この不等式を解け。また, その解に含まれる整数がただひとつだけとなる a の値の範囲を求めよ。

(2) 2 回さいころを投げたとき, 2 回目の目が 1 回目の目の約数となる確率を求めよ。

3 以下の問題の解答を, 解答用紙に記述せよ。

なお, この問題は, 解答用紙に**途中の計算式も記入すること**。

(1) 原点を O とする xy 平面上の 2 点 A$(6,3)$, B$(0,5)$ に対し, B から直線 OA へ引いた垂線と OA との交点を H とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ を成分で表せ。

(2) 3 次関数 $f(x)=2x^3+9x^2+a$ (a は定数) の極小値を p, 極大値を q とする。$q=4p$ となるとき, a,p,q の値を求めよ。

2023年度一般選抜C日程 数学

1 以下の問題の解答を, 解答用紙の該当する枠内に書き込むこと。

なお, この問題は, 解答用紙に**途中の計算式を記入する必要はない**。

(1) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分 a の値を求めよ。

(2) $U=\{x\,|\,x$ は $1 \leqq x \leqq 10$ の整数$\}$ を全体集合とする。

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $A\cap\overline{B}=\{3,\ 7\}$,

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ のとき, B を求めよ。

(3) 三角形 ABC の面積が $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ で, $\mathrm{CA}=2$, $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるとき, AB の長さを求めよ。

(4) 以下の 5 つの値からなるデータの分散 V を求めよ。

24, 15, 23, 32, 16

(5) $I=x^3-3x^2-x+3$ を因数分解せよ。

(6) 3 直線 $x+y+1=0$, $3x-y+2=0$, $mx+y-1=0$ が 1 点で交わるとき, 定数 m の値を求めよ。

(7) 関数 $f(\theta)=\cos^2\theta-4\sin\theta+5$ の最大値と最小値を求めよ (それを与える θ の値は求めなくてよい)。

(8) $n \leqq \log_5 250 < n+1$ を満たす整数 n を求めよ。

(9) 放物線 $y=x^2+3$ と直線 $y=-4x$ に囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(10) 整数 m, n について, m を 6 で割ると 4 余り, n を 3 で割ると 2 余るとき, mn を 6 で割ったときの余りを求めよ。

(11) 和 $I=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k+2)(k-1)$ を求めよ。

2 以下の問題の解答を, 解答用紙に記述せよ。

なお, この問題は, 解答用紙に**途中の計算式も記入すること**。

(1) 放物線 C_1 : $y=-2x^2+2$ と直線 ℓ : $y=3x$ について, 次の問いに答えよ。

[イ] C_1 と ℓ の交点の座標を求めよ。

[ロ] [イ] の交点のうち x 座標が大きい方を A とするとき, C_1 を x 軸方向に平行移動した放物線 C_2 が A を通る。このとき, C_2 の方程式を求めよ。ただし, C_2 は C_1 と異なるとする。

(2) A 君は外出先 1 軒に付き確率 $\dfrac{1}{3}$ で傘を紛失するとする。今日は傘を 1 本持ってコンビニ, 喫茶店, 友人宅を順に巡るとし, A 君がこの 3 軒のいずれかで傘を紛失する確率 p を求めよ。

また, 実際に A 君が 3 軒を巡って帰宅したら傘を紛失していたことに気がついた。このとき, 紛失したのが喫茶店である確率 q を求めよ。

3 以下の問題の解答を, 解答用紙に記述せよ。

なお, この問題は, 解答用紙に**途中の計算式も記入すること**。

(1) $\overrightarrow{a} = (3, 1)$, $\overrightarrow{b} = (-2, 6)$, $\overrightarrow{c} = (x, y)$ とする。$\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}$ が $\overrightarrow{a}$ と平行で, $|\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}| = 4\sqrt{5}$ であるとき, $\overrightarrow{c}$ の成分を求めよ。

(2) 3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ が $f'(1) = 0$, $f'(2) = -1$ を満たすとき, 定数 a, b の値, および $f(x)$ の極小値を求めよ。

２０２３年度一般選抜Ａ日程 数学 正答例

1

(1) $-2 < x < 3$	(7) $\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \pi$
(2) 4 個	(8) $a = 9, \frac{1}{3}$
(3) $\tan\theta = -\frac{\sqrt{15}}{15}$	(9) $k = \frac{2}{9}$
(4) $x = 1,\ y = 3$	(10) $n = 216$
(5) $9x^2 - 11x + 4 = 0$	(11) $x = -3, -1$
(6) $-\sqrt{6} \leqq k \leqq \sqrt{6}$	

(1) $-5 < -2x + 1 < 5$ より, $-6 < -2x < 4$, よって $\underline{-2 < x < 3}$

(2) $x^2 - 4x - 6 = 0$ の解は $x = 2 \pm \sqrt{4+6} = 2 \pm \sqrt{10}$ の 2 つなので, 部分集合は, ϕ, $\{2+\sqrt{10}\}$, $\{2-\sqrt{10}\}$, $\{2+\sqrt{10},\ 2-\sqrt{10}\}$ の $\underline{4\text{ 個}}$

(3) θ は第 2 象限だから $\cos\theta < 0$ なので, $\cos\theta = -\sqrt{1 - \frac{1}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$, よって $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{1}{\sqrt{15}} = \underline{-\frac{\sqrt{15}}{15}}$

(4) $\frac{2+x+3+3+4+5+y+2+1+6}{10} = \frac{x+y+26}{10} = 3.0$ より, $x + y = 4$, よって $x \leqq y$ より $x = 1, y = 3$ かまたは $x = y = 2$ であるが, $x = 1, y = 3$ のときは最頻値は 3, $x = y = 2$ のときは最頻値は 2 なので, $\underline{x = 1, y = 3}$

(5) 解と係数の関係より $\alpha + \beta = \frac{1}{3}$, $\alpha\beta = \frac{2}{3}$ となるから,
$-\alpha^2 - \beta^2 = -(\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta = -\frac{1}{9} + \frac{4}{3} = \frac{11}{9}$, $(-\alpha^2)(-\beta^2) = (\alpha\beta)^2 = \frac{4}{9}$ となる。よって $-\alpha^2, -\beta^2$ を解に持つ x の 2 次方程式は $x^2 - \frac{11}{9}x + \frac{4}{9} = 0$ となり, x^2 の係数が 9 のものは $\underline{9x^2 - 11x + 4 = 0}$

(6) 共有点の x 座標は $x^2 + (-x+k)^2 = 3$ より, $2x^2 - 2kx + k^2 - 3 = 0$ を満たす。これが実数解を持てばよいので, その判別式 $D \geqq 0$ が条件。$\frac{D}{4} = k^2 - 2(k^2 - 3) = -k^2 + 6 \geqq 0$, よって $\underline{-\sqrt{6} \leqq k \leqq \sqrt{6}}$

(7) 倍角の公式より $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 \leqq 0$, $(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) \leqq 0$, よって $-1 \leqq \cos\theta \leqq \frac{1}{2}$ となる。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より, 求める範囲は $\underline{\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \pi}$

(8) 底の変換により $\log_3 a - \log_a 9 = \log_3 a - \frac{\log_3 9}{\log_3 a} = \log_3 a - \frac{2}{\log_3 a} = 1$ となるので, $\log_3 a = t$ とすると $t^2 - 2 - t = (t-2)(t+1) = 0$ となり, $t = \log_3 a = 2, -1$ となる。よって $a = 3^2, 3^{-1} = \underline{9, \frac{1}{3}}$

(9) $\int_0^1 (x^2 - kx)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{kx^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{k}{2} = k$ より, $\frac{3k}{2} = \frac{1}{3}$, $\underline{k = \frac{2}{9}}$

(10) n は 6^3 の約数なので, $n = 2^k 3^\ell$ と書ける。$2^3 \times 3^2$ との最小公倍数が 6^3 なので $\ell = 3$, 2^5 との最大公約数が 2^3 なので $k = 3$, よって $n = 2^3 \times 3^3 = 8 \times 27 = \underline{216}$

(11) $(2x+3)^2 = \frac{1}{x} \times x^3 = x^2$, $(x+3)(3x+3) = 0$ より, $\underline{x = -3, -1}$

2

(1) $y = (x^2 - 2ax + a^2) + a^2 - 2a - 8 = (x-a)^2 + a^2 - 2a - 8$ なので, 頂点は $(a, a^2 - 2a - 8)$, これが第 4 象限にあるので, $a > 0$ かつ $a^2 - 2a - 8 = (a-4)(a+2) < 0$ となる。よって $a > 0$ かつ $-2 < a < 4$ より $\underline{0 < a < 4}$

(2) [イ] 1 段上がり 4 回と 2 段上がり 3 回の順列なので, 上がり方は
$\frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = \underline{35\text{ 通り}}$

[ロ] 1 段上がり 10 回, 2 段上がり 0 回は 1 通り,
1 段上がり 8 回, 2 段上がり 1 回は $\frac{9!}{8!1!} = 9$ 通り,
1 段上がり 6 回, 2 段上がり 2 回は $\frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$ 通り,
1 段上がり 4 回, 2 段上がり 3 回は 35 通り,
1 段上がり 2 回, 2 段上がり 4 回は $\frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$ 通り,
1 段上がり 0 回, 2 段上がり 5 回は 1 通り。
よって, $1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1 = \underline{89\text{ 通り}}$

3

(1) [イ] $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ となることが条件。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1, -1, 4)$, $\overrightarrow{\mathrm{DC}} = (-1, -a, 4)$ なので $\underline{a = 1}$

[ロ] $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1, -2, 2)$ なので, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \sqrt{1+4+4} = 3$,

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = -1+2+8 = 9$ より, $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \dfrac{9}{9\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, よって

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $\underline{\theta = \dfrac{\pi}{4}}$

(2) [イ] $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$, $f(1) = -1$, $f(-1) = 3$ より増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

よって $\underline{極小値\ -1\ (x = 1\ のとき),\ 極大値\ 3\ (x = -1\ のとき)}$

[ロ] 方程式は $f(x) = k$ と書けるので, $y = f(x)$ のグラフと $y = k$ の交点の x 座標が解となる。$f(0) = 1$ と $f(x)$ の増減表より, 負の解が 1 つとなるのは $k = 3$ か $k < 1$ の場合であり, 正の解が 2 つとなるのは $-1 < k < 1$ の場合なので, よって $\underline{-1 < k < 1}$

２０２３年度一般選抜Ｂ日程 数学 正答例

1

(1) $a = \dfrac{2003}{990}$	(7) 最小値は $-\sqrt{13}$
(2) 十分条件であるが必要条件ではない	(8) $x=1$ のとき最大値 3
(3) AB=2	(9) $I = -\dfrac{2a^3}{3}$
(4) $a = 7$	(10) a = 4
(5) $x = \dfrac{4}{5} \pm \dfrac{3}{5} i$	(11) $a = \dfrac{15}{2}$, $d = \dfrac{3}{2}$
(6) $b = -14$	

(1) $a = 2.0\dot{2}\dot{3} = 2.02323\cdots$, $100a = 202.32323\cdots$ より, $99a = 200.3 = \dfrac{2003}{10}$, よって $\underline{a = \dfrac{2003}{990}}$

(2) $26 = 2 \times 13$ と $78 = 2 \times 3 \times 13$ の最大公約数は 26 なので, m が 13 の約数なら m は 26 と 78 の公約数だが, 逆は真ではない。よって 十分条件であるが必要条件ではない

(3) $\mathrm{AB} = x$ とすると余弦定理より, $6 = x^2 + 4 - 4x\cos A = x^2 + 4 - x$, $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$, よって $x = \mathrm{AB} = \underline{2}$

(4) 元の 10 個のデータを並び変えると「0,2,2,4,5,6,6,8,9,9」となるので, 中央値は 5.5, よって a を追加すると中央値は 6 になるはずなので, $a \geqq 6$ であり, 題意より 6,7,8,9 のいずれかとなる。この値のうち, 元の最頻値 2,6,9 を変えないのは $\underline{a = 7}$

(5) $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-25}}{5} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-9}}{5} = \dfrac{4 \pm 3i}{5} = \underline{\dfrac{4}{5} \pm \dfrac{3}{5} i}$

(6) 直線 AC の方程式は, $y = \dfrac{3-1}{5-2}(x-2) + 1 = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{3} + 1 = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}$, よって $2x - 3y - 1 = 0$ となるから, 点 B との距離は, $\dfrac{|2b+3-1|}{\sqrt{4+9}} = \dfrac{|2b+2|}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}$ となり, $|2b+2| = 26$, $2b+2 = \pm 26$ より b は $b = -1 \pm 13 = 12, -14$ となるが, $b < 0$ より $\underline{b = -14}$

(7) 三角関数の合成により $y = \sqrt{4+9}\sin(\theta + \alpha) = \sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)$ と書けるので (α は定数), よって最小値は $\underline{-\sqrt{13}}$

(8) $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ より $x^2 - x$ は $x = 1$ のとき最小値 -1 を取る。$\dfrac{1}{3} < 1$ より $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ は x に関して減少するので, よって $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-x}$ は $x = 1$ のとき最大値 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} = 3$ を取る。よって $\underline{x = 1 \text{ のとき最大値 } 3}$

(9) $I = \left[\dfrac{x^3}{3} - a^2 x\right]_0^a = \dfrac{a^3}{3} - a^3 = \underline{-\dfrac{2a^3}{3}}$

(10) $1\mathrm{a}0_{(n)} = n^2 + \mathrm{a}n = 77$, $n(n+\mathrm{a}) = 7 \times 11$ となるので, これが満たされるのは $n = 7$, $n + \mathrm{a} = 11$ のときのみ。よって $\underline{\mathrm{a}=4}$

(11) 初項 a, 公差 d により $a_n = a + (n-1)d$ と書けるので, $b_n = a + (2n-1)d = 2dn + a - d$ となるから $2d = 3, a - d = 6$ である。よって $\underline{d = \dfrac{3}{2}}$ となり, $\underline{a = \dfrac{15}{2}}$

2

(1) [イ] $a = 1$ のとき不等式は $4x^2 - 4x + 1 < 0$ より $(2x-1)^2 < 0$ なので, 解なし

[ロ] $4x^2 - 2(a+1)x + a = (2x-1)(2x-a) < 0$, $a > 1$ より解は $\underline{\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{a}{2}}$ となる。この間に入る整数がただひとつだけの場合その整数は 1 であり, 解が 1 を含むためには $a > 2$, 2 を含まないためには $a \leqq 4$ なので, よって求める a の範囲は $\underline{2 < a \leqq 4}$

(2) 2回目の目が1回目の目の約数になる組は, (1回目, 2回目)=(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4), (5,1), (5,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,6) の 14 通り。よって確率は $\dfrac{14}{36} = \underline{\dfrac{7}{18}}$

3

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (6t, 3t)$ とすると, $\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (6t, 3t-5)$ で, これが $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (6,3)$ と垂直なので, $\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 36t + 9t - 15 = 45t - 15 = 0$ より $t = \dfrac{1}{3}$, よって $\overrightarrow{\mathrm{BH}} = (2, 1-5) = \underline{(2, -4)}$

(2) $f'(x) = 6x^2 + 18x = 6x(x+3)$, $f(0) = a$, $f(-3) = -54 + 81 + a = 27 + a$ なので, $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$27+a$	$\searrow$	a	$\nearrow$

よって $p = a$, $q = 27 + a$ なので $27 + a = 4a$ より $\underline{a = 9,\ p = 9,\ q = 36}$

２０２３年度一般選抜Ｃ日程 数学 正答例

1

(1) $a=3$	(7) 最大値 9, 最小値 1
(2) $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$	(8) $n=3$
(3) AB=3	(9) $S=\dfrac{4}{3}$
(4) $V=38$	(10) 2
(5) $I=(x-1)(x+1)(x-3)$	(11) $I=420$
(6) $m=-\dfrac{5}{3}$	

(1) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$ で $1<\sqrt{3}<2$ より $3<2+\sqrt{3}<4$ なので $\underline{a=3}$

(2) $A\cup B$ から $A\cap\overline{B}$ を取り除いたものが B なので, $\underline{B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}}$

(3) $\mathrm{AB}=x$ とすると, 面積は $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\times 2x\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ より $x=\underline{\mathrm{AB}=3}$

(4) 平均値 m は $m=\dfrac{24+15+23+32+16}{5}=\dfrac{110}{5}=22$, よって分散 V は,
$V=\dfrac{2^2+(-7)^2+1^2+10^2+(-6)^2}{5}=\dfrac{4+49+1+100+36}{5}=\dfrac{190}{5}=\underline{38}$

(5) $I=x^2(x-3)-(x-3)=(x^2-1)(x-3)=\underline{(x-1)(x+1)(x-3)}$

(6) $x+y+1=0$ と $3x-y+2=0$ の交点は, $4x+3=0$ より $x=-\dfrac{3}{4}$, $y=-x-1$ $=-\dfrac{1}{4}$ なので $(x,y)=\left(-\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{4}\right)$ となる。これを $mx+y-1=0$ に代入して $-\dfrac{3}{4}m-\dfrac{1}{4}-1=-\dfrac{3}{4}m-\dfrac{5}{4}=0$ より $\underline{m=-\dfrac{5}{3}}$

(7) $f(\theta)=1-\sin^2\theta-4\sin\theta+5=-(\sin^2\theta+4\sin\theta)+6=-(\sin\theta+2)^2+10$ と変形できるので, $-1\leqq\sin\theta\leqq 1$ より $\sin\theta=-1$ のときに最大, $\sin\theta=1$ のときに最小となる。よって, 最大値 9, 最小値 1

(8) $250>125=5^3$, $250<625=5^4$ より, $3<\log_5 250<4$ なので $\underline{n=3}$

(9) 放物線と直線の交点の x 座標は $x^2+3=-4x$ より $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)=0$, $x=-1,-3$ で, $-3\leqq x\leqq -1$ の範囲では直線の方が上にある。よって面積 S は,
$S=\displaystyle\int_{-3}^{-1}\{-4x-(x^2+3)\}dx=\int_{-3}^{-1}(-x^2-4x-3)dx=\left[-\dfrac{x^3}{3}-2x^2-3x\right]_{-3}^{-1}$
$=\left(\dfrac{1}{3}-2+3\right)-(9-18+9)=\underline{\dfrac{4}{3}}$

(10) 商をそれぞれ a,b と置くと $m=6a+4$, $n=3b+2$ となるので, $mn=(6a+4)(3b+2)$ $=18ab+12a+12b+8=6(3ab+2a+2b+1)+2$ となり, 求める余りは $\underline{2}$

(11) $I=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k^2+k-2)=\dfrac{10\times 11\times 21}{6}+\dfrac{10\times 11}{2}-20=385+55-20=\underline{420}$

2

(1) [イ] $-2x^2+2=3x$ より $2x^2+3x-2=(x+2)(2x-1)=0$, $x=-2,\dfrac{1}{2}$ となるので, 交点は $\underline{(-2,-6),\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)}$

[ロ] $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ であり, C_1 を x 軸の方向に a 平行移動したものが C_2 とすると, C_2 は $y=-2(x-a)^2+2$ と書け, これが A を通るから, $\dfrac{3}{2}=-2\left(\dfrac{1}{2}-a\right)^2+2$, $2\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2=2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$, $\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ より $a=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{1}{2}=0,1$ となるが, C_1 と C_2 は異なるので $a=1$, よって C_2 は $y=-2(x-1)^2+2$ $=-2x^2+4x-2+2$ より $\underline{y=-2x^2+4x}$

(2) 3 軒いずれでも傘を忘れない確率は $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$ なので, $p=1-\dfrac{8}{27}=\underline{\dfrac{19}{27}}$
q は 3 軒のいずれかで傘忘れたという条件付き確率であり, コンビニで忘れずに喫茶店で傘を忘れる確率は $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$ なので, $q=\dfrac{2}{9}\div\dfrac{19}{27}=\underline{\dfrac{6}{19}}$

3

(1) $\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}\ /\!/\ \overrightarrow{a}$ より $\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}=k\overrightarrow{a}$ となる実数 k があり, よって $(x+2,y-6)=(3k,k)$ より $x=3k-2$, $y=k+6$ となる。このとき,
$|\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}|^2=|(x-3,y-1)|^2=|(3k-5,k+5)|^2=(3k-5)^2+(k+5)^2$
$=9k^2-30k+25+k^2+10k+25=10k^2-20k+50=16\times 5=80$
となり, $k^2-2k+5-8=k^2-2k-3=(k-3)(k+1)=0$ より $k=-1,3$,
よって $\overrightarrow{c}=(3k-2,k+6)=\underline{(-5,5),\ (7,9)}$

(2) $f'(x)=3x^2+2ax+b$ より $f'(1)=3+2a+b=0$, $f'(2)=12+4a+b=-1$ より, $2a+b=-3$, $4a+b=-13$ なので, これを解いて $\underline{a=-5,b=7}$ となる。

よって $f'(x) = 3x^2 - 10x + 7 = (x-1)(3x-7)$, $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$,
$f(1) = 1 - 5 + 7 = 3$, $f\left(\frac{7}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{7}{3}\right)^2 + \frac{7^2}{3} = \frac{7^2(7-15+9)}{3^3} = \frac{49}{27}$
となるので, $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{7}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{49}{27}$	$\nearrow$

よって極小値は $\underline{\frac{49}{27}\left(x = \frac{7}{3}\text{ のとき}\right)}$